



Problema 1 – Metrou – Descriere soluție – Autor Vlad Alexandru Gavrilă

20 de puncte

Pentru $N \leq 20$, problema admite o soluție exponențială ce presupune selectarea fiecărei submulțimi posibile de stații (având grijă să nu includem două stații vecine) și calcularea profitului adus de respectiva submulțime. Complexitatea acestei soluții este $O(2^N)$ ca timp.

100 de puncte

Să considerăm întâi cum rezolvăm problema în situația în care rețeaua de metrou are forma unui lanț simplu. Această soluție presupune programare dinamică: ținem tabloul dp_i = profitul maxim adus de o submulțime a primelor i noduri din lanț. Recurența este $dp[i] = \max(dp[i-1], dp[i-2] + p[nod])$, unde nod = al i -ulea nod din lanț. Observăm că rezolvarea acestui caz are complexitate liniară $O(N)$, și aducea 10 puncte.

În situația în care rețeaua avea forma unui ciclu simplu, putem avea aceeași abordare ca la un lanț, rupând ciclul (eliminând o muchie) și transformându-l într-un lanț, apoi calculând dinamica precedentă. Această dinamică trebuie calculată de două ori, întâi excluzând primul nod din lanț, iar apoi excluzând ultimul nod, evitând astfel situația în care submulțimea de profit maxim includea atât primul cât și ultimul nod din lanț, care sunt vecine în ciclu $O(N)$. Observăm că rezolvarea acestui caz are aceeași complexitate liniară, și aducea încă 10 puncte.

Pentru rezolvarea problemei de 100 de puncte, trebuie să facem următoarea observație: dacă excludem din rețea toate stațiile cu mai mult de 2 vecini, vom obține o rețea formată din mai multe lanțuri care nu se intersectează. Pentru fiecare din aceste lanțuri vom reține de care nod sau noduri speciale erau legate, și vom aplica programarea dinamică anterioară de patru ori, pentru următoarele cazuri:

1. Excludem atât primul cât și ultimul nod din lanț.
2. Excludem doar primul nod din lanț.
3. Excludem doar ultimul nod din lanț.
4. Nu excludem niciun nod din lanț.

Având $K \leq 15$ noduri care au mai mult de 3 vecini (să le numim speciale), putem precalcuła pentru fiecare pereche de noduri speciale care este profitul maxim adus de lanțurile ce unesc nodurile din pereche dacă ar fi să selectăm în soluția finală zero, pe primul, pe al doilea, sau ambele noduri din pereche. Această precaluclare se face folosindu-ne de valorile obținute prin programarea dinamică pentru fiecare lanț. De asemenea se va trata similar cazul în care un lanț este unit de un singur nod special, celălalt capăt fiind o frunză.

Apoi putem selecta în timp exponențial submulțimi de noduri speciale, folosindu-ne de precaluclarea anterioară pentru a determina soluția finală. Complexitatea acestei abordări este $O(N + 2^K)$.

Menționăm că o abordare greedy care selectează la fiecare pas nodul cel mai profitabil care nu este învecinat cu un alt nod, obține 0 puncte deoarece nu produce răspunsul corect. Un caz ar fi lanțul (8 1 2 3 2 1 8) – abordarea greedy ar selecta (8 1 2 3 2 1 8) care ar aduce profitul 13, în timp ce programarea dinamică ar selecta (8 1 2 3 2 1 8) care produce răspunsul 14.